

MINISTERUL EDUCAȚIEI



UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Specializare: Matematică

TEZĂ DE ABILITARE
-REZUMAT-

**Câteva contribuții la studiul
funcțiilor care conservă măsura
și al operatorilor de aproximare**

Conf. Dr. Adrian HOLHOȘ

Facultatea de Automatică și Calculatoare
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Cluj-Napoca

2026

Această teză de abilitare, intitulată *Câteva contribuții la studiul funcțiilor care conservă măsura și al operatorilor de aproximare*, conține o parte din rezultatele activității mele de cercetare din domeniul Analizei Matematice după obținerea titlului de doctor în Matematică la Universitatea Babeș-Bolyai. Pe de o parte, ea reprezintă o continuare a studiului întreprins în perioada doctoratului (2006-2010) sub îndrumarea Profesorului Ioan Gavrea asupra operatorilor liniari și pozitivi. Pe de altă parte, domeniul de studiu se extinde la construcția de funcții care conservă aria sau volumul. Rezultatele în acest domeniu sunt obținute în principal în colaborare cu colega mea, Profesor Dr. Daniela Roșca.

Teza are două părți distincte. Prima parte conține câteva din rezultatele științifice obținute de autor în ultimii zece ani. Pentru o prezentare unitară și concisă, nu au fost prezentate toate rezultatele obținute de autor, ci doar cele mai semnificative. A doua parte a tezei prezintă câteva planuri de viitor legate de cariera academică.

Începem în Capitolul 1 cu funcțiile care conservă măsura. Fiecare secțiune conține rezultate din cele șase lucrări publicate în acest domeniu. Construim funcții care păstrează aria (sau funcții care păstrează volumul) și obținem grid-uri ierarhice pe sferă (sau pe bile) care pot fi utilizate în geofizică, astronomie, cristalografie, imagistică medicală, grafică pe calculator, aplicații statistice sau alte domenii. Un grid uniform pe un domeniu bidimensional (tridimensional) este o diviziune a ariei (sau volumului) în celule care au aceeași măsură. Atunci când un grid nu este suficient de fin pentru a rezolva cu o precizie dată o anumită problemă, avem nevoie de o rafinare a grid-ului. Noi obținem grid-uri uniforme care pot fi rafinate printr-o procedură simplă.

În prima secțiune a Capitolului 1, prezentăm o funcție bijectivă și continuă, împreună cu inversa sa, care este definită pe o clasă de dipiramide alungite, ia valori pe sferă și în plus păstrează aria. Folosind aceste funcții, se pot obține grid-uri uniforme și rafinabile pe sferă. Ca și caz particular, arătăm că grid-urile HEALPix (care sunt utilizate în astrofizică) pot fi obținute din aceste funcții. Aceste grid-uri pot fi utilizate și pentru a obține configurații ale punctelor de pe sferă. Pentru fiecare configurație de puncte, se pot calcula anumite numere (numite „energii”) care oferă informații despre acea configurație. O problemă deschisă în fizică este cum să aranjezi un număr dat de puncte pe sferă astfel încât energia configurației să fie minimă. Legat de această problemă, Steve Smale a propus în 1998 o listă de probleme nerezolvate în matematică, care include găsirea unui algoritm pentru a genera, pentru un număr dat, o configurație de puncte pe sferă, care este aproape optimă. Configurațiile noastre de puncte sunt aproape optime. Funcția care păstrează aria poate fi utilizată și pentru a obține o funcție care păstrează volumul pe sferă.

În Secțiunea 2 a Capitolului 1, prezentăm o funcție de la octaedrul regulat la sferă care păstrează aria. Metoda utilizată pentru obținerea funcției este aceeași, iar rezultatele sunt similare, dar am inclus aceste rezultate în prezenta teză pentru o anumită proprietate pe care o au gridurile asociate și care, în general, este greu de demonstrat: mărginirea diametrului. Această proprietate asigură că, în procesul de divizare ierarhică a celulelor, acestea nu devin lungi și subțiri. Pe lângă configurația aproape optimă a punctelor care poate fi obținută din grilele noastre, oferim ca o posibilă aplicație a funcției noastre construcția de hărți geografice pătrate ale unei emisfere. După cum se poate observa din citările acestui articol, a fost brevetată în SUA în 2022 o tehnică de mapare a culorilor care oferă o viziune intuitivă a normalelor de suprafață.

În Secțiunea 3 a Capitolului 1, construim o funcție care păstrează volumul de la un cub la un tetraedru și o generalizăm să fie de la un cub la un tetraedru arbitrar și, în continuare, la un poliedru convex arbitrar. De asemenea, prezentăm cum se construiesc griduri 3D uniforme, rafinabile, ale octaedrului.

În Secțiunea 4 a Capitolului 1, construim două funcții care păstrează aria de la pătrat la bila 2D (domeniul definit de $|x|^p + |y|^p \leq |a|^p$). Este inclusă și o discuție despre distorsiunea celulelor. În Secțiunea 5, construim aplicații care păstrează volumul între bile 3D.

În Secțiunea 6 a Capitolului 1, arătăm cum se obține o funcție care păstrează volumul de la un octaedru 3D regulat la bila 3D. Arătăm cum se construiesc alte griduri uniforme, rafinabile,

ale octaedrului regulat și oferim câteva observații despre implementarea lor. În final, obținem o analiză multirezoluție a lui $L^2(K)$ (unde K este octaedrul) și baze wavelet ortonormale constante pe porțiuni pe $L^2(B)$ (unde B este bila 3D).

În Capitolul 2, menționăm câteva rezultate legate de operatorii de aproximare. Am selectat patru lucrări relevante și le prezentăm în patru secțiuni separate. În Secțiunea 1, studiem operatorii Szász-Mirakyan de tip max-produs. Aceștia sunt operatori subliniari pozitivi definiți pe baza operatorilor clasici Szász-Mirakyan-Favard prin înlocuirea operatorului de sumă cu operatorul max. Aceștia pot fi utilizați pentru aproximarea funcțiilor mărginite sau nemărginite. Pentru unele clase de funcții, aceștia oferă un ordin mai bun de aproximare. Prin utilizarea unui modul de continuitate adecvat, rezultatele noastre extind în două moduri rezultatele existente. În primul rând, o clasă mai mare de funcții mărginite f poate fi aproximată uniform, și anume cele pentru care $f(x^2)$ este uniform continuă, și în al doilea rând, putem aproxima funcții nemărginite cu creștere exponențială.

Secțiunea 2 a Capitolului 2 conține rezultate legate de un anumit tip de operatori liniari și pozitivi care sunt generați de o ecuație diferențială, numiți operatori de tip exponențial. Pentru acești operatori, putem obține comportamentul asimptotic al momentelor și câteva rezultate generale de tip Voronovskaya. Din cauza cerințelor de spațiu, ne-am limitat prezentarea la câteva rezultate generale, dar trebuie să menționăm că pot fi date și alte rezultate generale, precum și multe cazuri particulare.

Secțiunea 3 din Capitolul 2 prezintă operatorii obținuți din operatorii clasici Bernstein prin ridicarea la pătrat a bazei lor și utilizarea normalizării. Studiul lor este recent în literatura matematică. Aceste tipuri de operatori obținuți din operatori clasici de tip exponențial utilizând o putere a bazei sunt, de asemenea, de tip exponențial. Așadar, unele rezultate generale pe care le-am prezentat în Secțiunea 2 pot fi aplicate și acestor operatori. În acest fel, obținem rezultate noi care nu sunt încă publicate. În acest sens, am dat un răspuns pozitiv unei conjecturi.

În Secțiunea 4 din Capitolul 2, studiem toți operatorii de tip exponențial care pot fi generați de o funcție putere. Printre aceștia, reobținem operatorii clasici ai lui Bernstein, ai lui Szász-Favard-Mirakyan, ai lui Baskakov, ai lui Post-Widder și ai lui Gauss-Weierstrass. Folosind transformatele Laplace și Fourier, obținem noi operatori care pot fi utilizați pentru aproximarea uniformă a funcțiilor.

A doua parte a tezei conține Capitolul 3, care prezintă câteva dintre planurile de viitor ale autorului. Intenționez să continui activitățile didactice și de cercetare la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. În ceea ce privește predarea studenților de licență, în special în acest nou context al inteligenței artificiale, doresc să îmbunătățesc metodele utilizate în educație, să implic studenții într-un mod activ și participativ. De asemenea, intenționez să elaborez propuneri de cercetare și să supervizez studenți la masterat și doctorat.

În ce privește colaborările, până acum am avut o bună colaborare cu colega mea Daniela Roșca și am scris cinci articole împreună. De asemenea, am scris o lucrare în colaborare cu colectivul de la departamentul de Inginerie Electrică și recent, o lucrare împreună cu Vijay Gupta. O altă lucrare recentă a fost scrisă în colaborare cu o echipă de cercetare de la Universitatea Harran din Turcia. Acestea dovedesc că autorul poate lucra cu succes în echipe de cercetare atât la nivel național, cât și internațional. Intenționez să continui aceste colaborări și să încep altele noi.

Plănuiesc să public și o monografie care să conțină toate rezultatele obținute deja cât și altele noi care vor apărea din proiectele viitoare. Câteva din aceste proiecte viitoare vreau să le prezint pe scurt în continuare.

Vreau să extind studiul operatorilor de tip exponențial în câteva direcții. În primul rând, ecuația diferențială care stă la baza acestor operatori poate fi dată într-o formă mai generală care să includă și alte tipuri cunoscute de operatori liniari și pozitivi. Cât de mult poate fi generalizată această ecuație? Nu toți operatorii liniari și pozitivi sunt de tip exponențial. Este posibil să extindem ecuația diferențială la o anumită relație care să permită includerea în clasa aceasta

generală și alte tipuri de modificări ale operatorilor clasici (de exemplu de tip Chlodovsky, sau Kantorovich, sau Durrmeyer)? Așadar, o direcție de cercetare este aflarea celei mai generale forme a ecuației care poate fi considerată.

În teză am dat câteva rezultate legate de aproximarea punctuală și asimptotică a operatorilor de tip exponențial. Ce alte proprietăți pot fi deduse din ecuația diferențială pe care o verifică? Putem obține rezultate de aproximare uniformă pentru această clasă generală de operatori. Ce putem spune de clasa maximală a funcțiilor care pot fi approximate cu ajutorul unui șir dat de operatori de tip exponențial? Cum o putem determina din ecuație? Aceste întrebări motivează un studiu viitor.

O clasă de operatori de tip exponențial pe care am început să o studiem este cea a operatorilor construiți prin ridicarea la pătrat a bazei operatorilor clasici. Ce funcție poate aleasă în locul funcției putere astfel încât operatorii să fie de tip exponențial? Care sunt proprietățile acestor noi operatori? Oare au proprietăți bune de aproximare? Aceasta este o altă direcție pentru un studiu viitor.

În domeniul funcțiilor care păstrează măsura, dorim să construim, dacă este posibil, o funcție simetrică în toate variabilele, una care să prezinte o simetrie față de domeniu. Pornind de la aceasta, dorim să construim wavelet-uri simetrice și ușor de implementat.