

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI



UNIVERSITATEA TEHNICĂ  
DIN CLUJ-NAPOCA

# TEZĂ DE ABILITARE

pentru acordarea atestatului de

## Abilitare

de către UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Domeniu fundamental: MATEMATICĂ ȘI ȘTIINȚELE  
NATURII

Specialitate: MATEMATICĂ

Candidat

Maria Anastasia JIVULESCU

## Metode matematice în Teoria Informației Cuantice

Departamentul de Matematică,  
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA



---

## Metode matematice din Teoria Informației Cuantice

### Rezumat extins

Principalul obiectiv al acestei teze este de a prezenta cele mai importante realizări științifice, profesionale și academice ale autoarei, după Ianuarie 2008, când și-a prezentat teza de doctorat, și până în prezent. Domeniul de cercetare al autoarei îl reprezintă aplicațiile Matematicii (în special, Teoria Operatorilor, Algebre de Operatori, Algebră Liniară, Teoria Matricilor Aleatoare) în Teoria Informației Cuantice (QIT). Pe diverse subiecte din QIT autoarea a publicat 12 articole de jurnale (11 articole ISI și 1 articol BDI). Autoarea a coordonat în calitate de director (2013-2016) un grant UEFISCDI câștigat prin competiție națională.

Autoarea și-a început cariera academică în Octombrie 2002 în cadrul Departamentului de Matematică al Universității Politehnica Timișoara ca și Preparator/Asistent, în 2011 a promovat la gradul academic de Lector univ. dr., iar în 2016 la cel de Conferențiar univ.dr. In activitatea didactică a predat diverse seminarii/cursuri și a introdus două cursuri noi, unul de *Probabilități și Statistică*, la nivel licența, în cadrul facultății de Chimie Industrială, și altul de *Analiza Supraviețuirii*, la nivel Master. Toate aceste realizări sunt detaliate în Capitolul (1) al acestei teze.

Prezenta teză este organizată în jurul a două teme fundamentale ale QIT, anume teoria criteriilor de entanglement/separabilitate și teoria măsurărilor cuantice. Contribuția autoarei la aceste teme este detaliată în Capitolele (3-7). În capitolul (2) sunt detaliate principalele noțiuni și metode din QIT folosite în această teză. De asemenea este prezentată situația la zi a rezultatelor din literatura de specialitate despre criteriile de entanglement și despre măsurările cuantice. Capitolul (2) are un caracter monografic, facilitând astfel introducerea noțiunilor de bază din QIT.

În capitolele (3) și (4) sunt prezentate contribuțiile autoarei la dezvoltarea metodelor legate de a decide dacă o stare ce descrie un sistem cuantic este separabilă sau entanglement, rezultate analitice (folosind metode din Teoria Operatorilor) sau metode mai sofisticate (din Teoria Matricilor Aleatoare). Sunt menționate rezultatele autoarei despre unificarea criteriilor de entanglement folosind norme tensoriale (în Capitolul(3)) sau diverse caracterizări analitice ale A(absolut)-mulțimilor sau studii legate de volumul lor, prin diverse aproximări. Aceste rezultate au condus la derivarea punctelor de limită (thresholds) pentru cele mai folosite criterii de entanglement, iar, ulterior, aceste rezultate au permis compararea performanței acestor criterii. Rezultatele obținute au fost prezentate în 4 articole publicate în jurnale internaționale. Teoria dezvoltată pe baza testerelor de entanglement în articolul [Jivulescu et al. 2022] a dus la rezolvarea în sens pozitiv a uneia din conjecurile existente despre criteriile de entanglement ESCI și CR. Demonstrația se bazează pe următorul rezultat

**Theorem 0.0.1** Pentru orice stare cuantică  $\rho$  on  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ , avem

$$\|\mathcal{S}^{\otimes 2}(\rho)\|_{\ell_2^{d^2} \otimes \pi \ell_2^{d^2}} \geq \frac{\|\mathcal{R}^{\otimes 2}(\rho)\|_{\ell_2^{d^2} \otimes \pi \ell_2^{d^2}} + 1}{2}. \quad (1)$$

Este de așteptat ca rezultate similare să aiba loc pentru alte criterii, folosind metode similare.

Criteriul reducerii a reprezentat criteriul cel mai studiat în articolele [Jivulescu et al. 2014], [Jivulescu et al. 2015a] și [Jivulescu et al. 2015b]. Legat de acest criteriu de entanglement s-au obținut rezultate analitice legate de spectrul acestor stări cuantice. Amintim aici unul dintre cele mai semnificative rezultate din articolul [Jivulescu et al. 2015b]

**Corollary 0.0.2** Dat un vector  $\psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k$  cu coeficienții Schmidt  $\{x_i\}_{i=1}^r$  (ordonată descrescător), valorile proprii ale matricei  $(\psi\psi^*)^{\text{red}}$  sunt

$$\text{spec} \left( (\psi\psi^*)^{\text{red}} \right) = \left( \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k-1 \text{ times}}, \eta_1, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{k-1 \text{ times}}, \dots, \eta_{r-1}, \underbrace{x_r, \dots, x_r}_{k-1 \text{ times}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r)k \text{ times}}, \eta_r \right) \in \mathbb{R}^{nk},$$

unde  $x_i \geq \eta_i \geq x_{i+1}$  for  $i \in [r-1]$  și  $\eta_r = -\sum_{i=1}^{r-1} \eta_i \leq 0$ . Mulțimea  $\{\eta_i\}_{i=1}^r \setminus \{x_i\}_{i=1}^r$  este dată de soluțiile  $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=1}^r$  ale ecuației  $\sum_{i=1}^r \frac{x_i}{x_i - \eta} = 1$ .

Acest rezultat a fost folosit ulterior pentru a caracteriza mulțimea stărilor cuantice ARED, dar și la derivarea punctelor de limită pentru această mulțime, fiind o aproximare a mulțimii stărilor ASEP.

Capitolele (5),(6),(7) se bazează pe studiile autoarei pe tema măsurătorilor cuantice și a rezultatelor obținute despre structura, proprietățile și despre metodele de generare a măsurătorilor cuantice aleatoare (POVM). Pe acest subiect au fost publicate 4 articole. Reamintim aici criteriul de incompatibilitate a  $g$ -POVMs ce se bazează pe funcția Zhu, teorie prezentată pe larg în [Heinosaari et al. 2022]

**Theorem 0.0.3** Fie  $\mathcal{A} = \{A^{(1)}, \dots, A^{(g)}\}$  o mulțime de  $g$  măsurări cuantice (de dimensiune  $d$ ). Pentru o stare  $\rho$ , notăm

$$F_\rho(\mathcal{A}) := \left\{ F_\rho(A^{(i)}) \right\}_{i=1}^g.$$

Dacă există o stare cuantică  $\rho > 0$  astfel încât

$$\mathfrak{h}(F_\rho(\mathcal{A})) > \min \left( d, \prod_{i=1}^g \ell(A^{(i)}) \right)$$

atunci  $\mathcal{A}$  sunt incompatibile.

Ne așteptăm ca acest criteriu să devină unul din instrumentele de baza pentru a demonstra incompatibilitatea măsurătorilor cuantice, dată fiind ușurința cu care se poate aplica, dar și faptul că există o formulare de tip SDP, ce poate fi aplicată, folosind calculatorul.

Legat de studiul măsurătorilor cuantice, este important de menționat rezultatul din lucrarea [Jivulescu et al. 2017] legat de descompunerea unui operator pozitiv printr-o familie de operatori, având o structura geometrică bine-definită:

---

**Proposition 0.0.4** *Se dă un operator auto-adjunct  $T$ , let  $t_2 := \text{Tr}[T^2]$ . Se consider  $\mathcal{E}$  o familie simetrică de operatori auto-adjuncți având parametrii  $a$  și  $b$ . Atunci,  $\mathcal{E}$  este o descompunere simetrică a lui  $T$  dacă și numai dacă*

$$b = \frac{t_2 - Na}{N(N-1)} \quad (2)$$

și

$$\text{Tr}[E_i T] = \frac{t_2}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

În articolul [Heinosaari et al. 2020] sunt prezentate diverse modele de a genera măsurători cuantice aleatoare și este studiată, de asemenea, problema ca date fiind două POVM aleatoare independente, care este probabilitatea ca ele să fie compatibile. Astfel, folosind tehnici din Teoria Matricilor Aleatoare aplicată pentru criteriile de compatibilitate existente în literatura de specialitate, s-au obținut diverse versiuni pentru aceste criterii, cum ar fi, de exemplu, criteriul Jordan pentru măsurători cuantice aleatoare:

**Theorem 0.0.5** *Fie  $(A^{(d)})$ ,  $(B^{(d)})$  două șiruri de POVM aleatoare de parametrii  $(d, k; n_d)$  și  $(d, l; m_d)$ , unde  $n_d$  și  $m_d$  sunt două șiruri  $d \sim skn_d$  și  $d \sim tlm_d$ , iar  $s, t \in (0, 1]$  două constante. Dacă*

$$\left(\sqrt{R(k, s)} - 1\right) \left(\sqrt{R(l, t)} - 1\right) < 2, \quad (4)$$

*atunci, aproape sigur, pentru  $d \rightarrow \infty$ , POVM  $A^{(d)}$  și  $B^{(d)}$  sunt asimptotic compatibile.*

În finalul tezei, în Capitolul (8), sunt prezentate planurile de viitor ale autoarei legate de dezvoltarea profesională, științifică și academică.

**Keywords:** Teoria Informației Cuantice, Entanglement, Măsurări Cuantice

---