MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Domeniul: MATEMATICĂ

TEZĂ DE ABILITARE

– REZUMAT –

METODE COOMOLOGICE ÎN TEORIA REPREZENTĂRILOR MODULARE ȘI TEME CONEXE

Conf. Dr. Constantin-Cosmin TODEA
Facultatea de AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE
Universitatea TEHNICĂ din CLUJ-NAPOCA

– Cluj-Napoca –
2024

Această teză este o însumare a rezultatelor obținute după susținerea tezei de doctorat în 2010, care sunt publicate în domeniul teoriei reprezentărilor modulare ale grupurilor finite și în teoria metodelor coomologice. Pe scurt, teoria reprezentărilor modulare ale grupurilor finite este acea parte a teoriei reprezentărilor care studiază reprezentările liniare ale grupurilor finite peste corpuri k de caracteristică un număr prim p. Când am elaborat aceste articole însumate în teză am fost influențat de titlul următorului articol scris de Alperin: "Cohomology is representation theory".

Principalele concepte care apar în această teză sunt: algebra grupală kG (a unui grup finit G peste un corp algebraic închis k de caracteristică p, un număr prim), algebrele de tip bloc din kG (un bloc este un idempotent primitiv din centrul $Z(kG)$ al algebrei grupale), sistemul de fuziune saturat (o categorie care imită comportamentul fuziunilor în grupurile finite), coomologia grupurilor finite, coomologia sistemelor de fuziune saturate și coomologia Hochschild a algebrelor (invarianții coomologici pentru conceptele de mai sus). La modul general, teoria algebrei de coomologie reprezintă studiul functorului omologic *Ext* și a structurilor algebrice determinate de acesta.

Teza are șase capitole. Primul Capitol al acestei teze are ca rol elaborarea unui dicționar al conceptelor, notațiilor și ideilor din teoria reprezentărilor modulare și din teoria algebrei de coomologiei, care vor fi folosite în capitolele următoare.

Capitolul Doi este mai ales despre rezultate care sunt inspirate și care continuă articolele utilizate în teza mea de doctorat. Este vorba despre: inele de coomologie ale sistemelor de fuziune saturate, morfisme de restricție și varietăți (Secțiunea 2.1), imaginea unui morfism în coomologia blocurilor grupurilor (Conjectura lui Sasaki din Secțiunea 2.3) și cooomologia Hochschild de ordinul întâi a algebrelor de tip bloc ale grupurilor finite (Secțiunea 2.4). Din acest capitol se remarcă Teorema 2.2.3, care este de fapt Teorema lui Mislin pentru coomologia sistemelor de fuziune. Într-un articol publicat în "Inventiones Mathematicae" (în 2017) Benson, Henke and Grodal au obținut o demonstrație algebrică a unei celebre teoreme a lui Mislin: dacă H este un subgrup al grupului finit G de index prim cu p care induce un omeomorfism de varietăți coomologice modulo p, atunci H controlează p-fuziunea în G (în cazul în care p este un număr prim impar). În Secțiunea 2.2 se demonstrează, din nou cu metode pur algebrice, o extindere a teoremei anterioare la cazul coomologiei sistemelor de fuziune saturate definite pe p-grupuri; din nou, doar dacă p este un număr prim impar.

În Capitolul Trei ne vom concentra pe rezultate care extind concepte și teoreme de la: blocuri ale grupurilor finite, algebre G-interioare și echivalențe Morita bazice, la: blocuri ale subgrupurilor normale (deci din kH) invariate de acțiunea grupului mai mare (adică G), G-algebre H-interioare (H este subgrup normal a unui grup finit G) și respectiv, echivalențe bazice Morita graduate de grupuri. Secțiunea 3.1 se bazează pe un articol scris cu Coconeț și are ca și punct de plecare construcția unei generalizări (la cazul G-algebrelor H-interioare) a câtului Brauer extins, definit de Puig și Zhou în 2007. Utilitatea acestei extinderi constă în stabilirea unor corespondențe (Teorema 3.1.7) care au loc în cazul algebrelor grupale. În Secțiunea 3.2 expunem rezultate despre generalizări ale blocurilor, adică idempotenți primitivi din $(kH)^G$, unde $(kH)^G$ este subalgebra elementelor G-stabile din kH, cu grupul G acționând prin conjugare. Suntem preocupați de sistemele de fuziune care se pot asocia în acest context și de invarianța lor (Teorema 3.2.7), dacă subgrupul hyperfocal asociat este abelian. Al doilea rezultat principal al acestei secțiuni (Teorema 3.2.8) tratează echivalențele Morita bazice graduate, care au fost recapitulate în Capitolul Unu, Secțiunea 1.1.2. În Secțiunea 3.4, care este bazată pe un alt articol scris în colaborare cu Coconeț, ne întoarcem la cazul clasic al blocurilor (adică $H=G$ în contextul Secțiunii 3.2) pentru a investiga relația lor cu blocurile grupurilor (numite blocuri dominante).

Capitolul Patru este mai ales despre algebra omologică: coomologia grupurilor și coomologia Hochschild în diverse contexte. Totuși, în anumite secțiuni ne vom referi și avem în vedere aplicații ale rezultatelor prezentate în cazul algebrelor de tip bloc din teoria reprezentărilor modulare ale grupurilor finite. Coomologia simetrică a grupurilor, care este subiectul principal al Secțiuni 4.1, a fost introdusă de Staic în 2009 pentru a asocia unor spații topologice niște elemente din coomologia simetrică de ordinul trei a unor grupuri. În această secțiune vom defini morfismele de restricție, de conjugare și morfismul transfer între coomologii simetrice de grupuri (Definiția 4.1.2) și vom arăta că acestea formează un functor Mackey (Teorema 4.1.3), dacă impunem o nouă condiție (injectivitatea morfismului natural de la coomologia simetrică la coomologia "clasică" a grupurilor). În Secțiunea 4.2 prezentăm coomologia simetrică Hochschild a algebrelor grupale răsucite (Definiția 4.2.1), definită similar cu construcția coomologiei simetrice a grupurilor realizată de Staic. Pentru aceasta am definit o acțiune a grupului simetric asupra complexului de colanțuri Hochschild, al unei algebre grupale răsucite, cu coeficienți într-un bimodul. În rezultatele principale (Teoremele 4.2.5 și 4.2.7), care au fost publicate în 2022 într-un articol din "Homology, Homotopy and Applications", prezentăm scufundări explicite și morfisme de legătură între coomologia simetrică a grupurilor și coomologia simetrică Hochschild a algebrelor grupale răsucite. Secțiunea 4.3 admite o abordare diferită față de Secțiunile 4.1 și 4.2. Această secțiune este construită în jurul unui articol recent publicat, ca autor unic în „Comptes Rendu Mathematique" 2021. Grupul de coomologie Hochschild al unei algebre asociative admite o structură bogată. Este o algebră graduat comutativă via produsul "cupă" și admite o paranteză Lie graduată de grad *-1*, obținându-se ceea ce se numește în prezent algebra de tip Gerstenhaber. O structură nouă în teoria coomologiilor Hochschild, algebra de tip BV, a fost studiată intensiv în topologie și fizica matematică. Pe scurt, o structură de tip Batalin-Vilkovisky (BV) este un operator pe coomologia Hochschild, de pătrat zero și care, împreună cu produsul cupă, determină paranteza de tip Gerstenhaber. Un alt tip de structuri numite algebre de tip BD (Beilinson-Drinfeld), care au apărut în fizica matematică, admite o similaritate "superficială"cu algebrele de tip BV. Principalul obiectiv al acestei secțiuni (Teorema 4.3.6) este acela de a transporta structurile de BD algebre din fizica matematică în algebră, obținând astfel metode de a construi algebre de tip BD în contextul coomologiei grupurilor. Un ingredient important pentru a atinge scopul menționat anterior este Teorema 4.3.4, în care generalizăm bine cunoscutul rezultat care ne spune că inelul de coomologie $H^*(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ împreună cu un morfism de legătură (numit morfism Bockstein), care este indus dintr-un anumit șir exact scurt de $\mathbf{Z}G$-module triviale, este o DG-algebră (diferențial-graduată). În Secțiunea 4.3.3 este descris un exemplu care se încadrează în ipotezele Teoremei 4.3.6.

Rezultatele expuse în Capitolul Cinci sunt legate de anumite aspecte și idei care apar în capitolele anterioare, dar sunt tratate dintr-o perspectivă diferită. Acest capitol este elaborat în jurul unui articol publicat în "Journal of Algebra" în 2012 și în jurul unui articol scris în colaborare cu Coconeț și Marcus, publicat în 2017. În Secțiunea 5.1, folosind teoria semigrupurilor inverse, identificăm și definim o clasă de algebre simetrice (Teorema 5.1.1), pe care le denumim algebre invers-simetrice. Reamintim că o k-algebra A (în această secțiune presupunem că inelul k este comutativ) se numește simetrică dacă există o formă k-liniară centrală de la A la k care induce un izomorfism de (A, A)-bimodule de la A la k-dualul $Hom(A,k)$. Secțiunea 5.2 este mai ales despre algebre induse. În teoria reprezentărilor grupurilor finite, Puig a introdus noțiunea de inducție de tip Frobenius aplicată algebrelor G-

interioare (aici G este un grup finit). Această construcție are multe aplicații importante și este strâns legată de inducția Frobenius clasică de module. Fie k un corp comutativ, fie A, B două k-algebre și fie C o k-algebră B-interioară. Pentru un (A,B)-bimodul M, Linckelmann a definit în 2002 algebra indusă *Ind_M(C).* Principalul obiectiv al acestei secțiuni este de a găsi condiții pentru un (A,B)-bimodul M astfel încât algebra indusă *Ind_M(C)* să fie descrisă în două moduri: ca și o algebră de endomorfisme și ca un produs tensorial (Teorem 5.2.1). Al doilea obiectiv atins este acela de a construi o inducție ne-injectivă, printr-un morfism de algebre augmentate (Definiția 5.2.1) care generalizează inducția ne-injectivă introdusă de Puig la grupuri; apoi de a generaliza inducția Turull a unei a H-algebre de la un subgrup H la un grup finit G, în contextul algebrelor Hopf. Al treilea obiectiv constă în determinarea unei relații prin intermediul produsului de tip ”smash” (în contextul algebrelor Hopf) între cele două tipuri de inducții (Teoremele 5.2.4 și 5.2.6).

Capitolul Șase este dedicat descrierii planurilor pentru evoluția direcțiilor de cercetare și academice ale autorului tezei, în acord cu formatul tezelor de abilitare cerut de Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. Am fost implicat ca și membru într-un număr consistent de granturi de cercetare UEFISCDI, dar am fost de asemenea directorul unui grant UEFISCDI de tip „Tinere Echipe” în perioada 2019-2021 (colaborare cu UBB). Secțiunea de Bibliografie conține 100 de titluri, dintre care 17 articole ISI-Web of Science sunt publicate de autorul tezei. Dintre acestea: 10 articole sunt publicate ca autor unic iar 7 articole sunt publicate ca și coautor.